# שאלה 1.

נגדיר פונקציה לחישוב המרחק החוקי המינימאלי של כל קודקוד לקצה הימני:

מקרי קצה:

נשים לב שכל עמודה תלויה רק בעמודה לימינה, נשתמש בשיטה של תכנון דינאמי, נגדיר מערך בגודל , נאתחל את מקרי הקצה בזמן ונאחשב את מהעמודה הלפני אחרונה לראשונה כאשר הזמן לכל עמודה הוא ובסה"כ .

בנוסף נגדיר הצומת הבא במסלול המינימאלי לכל כאשר הוא יקבע בהתאם למינימום שנבחר בחישוב .

כעת נבחר את האיבר מהעמודה הראשונה בעל מינימאלי ונשחזר את המסלול המינימאלי ע"י ערכי מהאיבר הזה עד לעמודה האחרונה. הזמן שנדרש לשלב זה הוא .

בסה"כ זמן הריצה הוא – כנדרש.

# שאלה 2.

נגדיר 1 אם יש פלינדרום באורך שתחילתו באות ה-, ו-0 אחרת.

נשים לב כי כל שורה ב- תלויה רק בשתי הקודמות, לכן מספיק לשמור רק שלוש שורות אחרונות בזמן הריצה.

נאתחל את כל תאי שתי השורות הראשונות ל-1.

נמלא את שאר השורות עד השורה ה- בזו אחר זו תוך שמירת התא האחרון ששונה ל-1.

לפסוף נניח שהתא האחרון ששונה ל-1 הוא אז נחזיר את תת המחרוזת מ- באורך .

זמן הריצה למילוי כל תא הוא ואנו ממלאים תאים ולכן זמן הריצה הוא .

# שאלה 3

א.

בנקודה הצד הימני של המונה מתאפס, ולכן הפולינום עדיין עובר ב-.

בנקודה הצד השמאלי של המונה מתאפס, ולכן הפולינום עדיין עובר ב-.

עבור מתקיים ולכן:

*, שוב כנדרש.*

*ב.*

*נשים לב שבנוסחת הנסיגה כל פולינום דרך נקודות תלות בפולינומים דרך נקודות ולכן ניתן להשתמש בתכנון דינאמי ולבנות את הפולינומים בסדר לפי מספר הנקודות שהם כוללים.*

*נניח שהקלט הוא סדרת הנקודות , כמובן נניח שערכי ייחודיים כדי לא לקבל נתונים סותרים.*

*נגדיר מערך בגודל של פולינומים שמייצג את הפולינומים .*

*נאתחל בזמן .*

*לאחר מכן עבור מ-2 עד נחשב את השורה ה- של עבור מ-1 עד , .*

*שני כפלי הפולינומים, ההפרש וגם החלוקה בקבוע מתבצעים ב-, כלומר חישוב השורה מתבצע ב-*

*לבסוף התוצאה היא , בהתאם לנוסחת הנסיגה בסעיף הקודם.*

*ג.*

*נחשב את השורה הראשונה ע"י הצבת ערכי ה- של הנקודות:*

*נחשב את שאר השורות לפי הנוסחה:*

*הערך שיוחזר הוא הפולינום המקורי, .*

# שאלה 4

*א.*

*האלגוריתם מחשב מרחקים מינימאליים מ- לכל הקשתות בגרף .*

*נוכיח באינדוקציה שבסוף האיטרציה ה- של הלולאה החיצונית, יכול רק אם אין מסלול באורך של לכל הפחות מ- ל- ואחרת יכיל משקל של מסלול כלשהו מ- ל- ומשקל זה יהיה קטן או שווה למשקל כל המסלולים מ- ל- שאורכם לכל היותר .*

***בסיס:*** *לפני הריצה הראשונה של הלולאה החיצונית (האיטרציה ה-0), הצומת היחיד שיש אליו מסלול באורך הוא עצמו ומשקל המסלול הוא 0, לשאר הצמתים אין מסלול באורך שיסתור את הערך , לכן האתחול של תואם את הטענה.*

***צעד האינדוקציה:*** *נניח שהטענה נכונה ל- ונוכיח ל-:*

*לפי הנחת האינדוקציה לכל , מכיל משקל של מסלול כלשהו מ- ל- ומשקל זה קטן או שווה למשקל כל המסלולים מ- ל- שאורכם לכל היותר .*

*נניח בשלילה שהערך יסתור את טענת האינדוקציה בסוף האיטרציה ה-, כלומר יש מסלול באורך מ- ל- שמשקלו קטן מ-.*

*אך במקרה הזה תהי הקשת האחרונה במסלול כזה; אל ישנו המסלול באורך ללא הקשת ולפי הנחת האינדוקציה קטן או שווה למשקל המסלול הזה, לכן יהיה קטן או שווה ל- בסוף האיטרציה ה- – בסתירה להנחה בשלילה.*

*כעת נניח בשלילה שערכו של אינו משקלו של מסלול מ- ל-, לפי הנחת האינדוקציה זה מחייב ש- עודכן באיטרציה הנוכחית ונניח ש- הוא הקודקוד הראשון עבורו ישנה הפרה לאחר העדכון (אפשר להניח את זה כי אם ישנן הפרות הרי חייבת להיות הפרה ראשונה כלשהי).*

*תהי הקשת שבסריקה שלה עודכן . לפי ההנחה שזו ההפרה הראשונה ולפי הנחת האינדוקציה הוא משקל מסלול כלשהו, , ועדכנו את להיות ולכן הוא משקל המסלול , וזו סתירה להנחה בשלילה.*

*מ.ש.ל.*

מאחר ואין מעגלים שליליים בגרף (כי משקלי כל הקשתות אי-שליליים), לכל שעבורה קיים מסלול מ- ל-, קיים מסלול מינימאלי ללא מעגלים, אחרת היה ניתן להסיר אותם ממנו ולקבל מסלול כזה.

לכן קיים מסלול מינימאלי כזה באורך לכל היותר.

ולכן יכיל משקל קטן או שווה למשקל המסלול המינימאלי מ- ל- בסוף האיטרציה ה- אם קיים כזה.

מצד שני כל ערך שקול למשקלו של מסלול כלשהו מ- ל- ולכן אכן יכול את המרחק מ- ל-.

*ב.*

*כפי שנכתב בתשובה לסעיף הקודם, לאחר איטרציות כבר נמצאים כל הערכים של המרחקים ב-, ולכן באיטרציה ה- חובה שלא יהיו עדכונים ואז תסתיים ריצת הלולאה. .*

*נראה סדרת גרפים שעבורה אכן ידרשו איטרציות.*

*עבור נגדיר את הגרף הבא שמשקל כל הקשתות בו 1:*

אז בריצה של האלגוריתם באיטרציה ה- יעודכן בלבד ואכן רק האיטרציה ה- תהיה ללא עדכונים.

*ג.*

*נראה סדרת גרפים שעבורה אכן ידרשו איטרציות בלבד, וזאת למרות שמספר הצלעות בהם לא שונה.*

*עבור נגדיר את הגרף הבא שמשקל כל הקשתות בו 1:*

אז בריצה של האלגוריתם באיטרציה הראשונה יעודכנו לפי הסדר כאשר כל אחד מהם יקבל כבר את משקל המסלול המינימאלי אליו (משום שהמסלול המינימאלי עובר דרך הקשת הקודמת בלולאה וגם אליה כבר חושב המסלול המינימאלי) ולכן בריצה השניה של הלולאה כבר לא יהיו עדכונים והאלגוריתם יסיים את ריצתו.